

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ
НЕЛИНЕЙНОЙ И НЕОДНОРОДНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ
ВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ
С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ПАСТЕРНАКА**

И.Т.ПИРМАМЕДОВ

Бакинский Государственный Университет

Использование конструкционных материалов приводит к необходимости более полного учета особенностей материалов и конструкций с целью рационального конструирования и проведения надежного расчета на прочность. Для более полного описания несущей способности конструкции необходим учет воздействия на нее со стороны контактирующей с ней внешней упругой среды, каковым является заполнитель. Для учета влияния заполнителя применяется модель Пастернака. Суть этой модели заключается в том, что реактивное давление со стороны заполнителя на оболочку на поверхности контакта определяется зависимостью

$$q_z = (\tilde{q} + \tilde{q}_0 \nabla^2) w,$$

где ∇^2 - двумерный оператор Лапласа на поверхности контакта. Решение такого типа задач представляет математическую трудность, которая усугубляется с учетом динамических эффектов, имеющих место в задачах сейсмостойкости и вибрации. Сложность подобных задач приводит к необходимости разработок приближенных методов. Одним из таких методов является вариационный, преимущество которого объясняется еще тем, что он позволяет получить непротиворечивые приближенные теории для тонкостенных конструкций типа оболочек и стержней.

В данной статье на основе вариационного принципа исследуются параметрические колебания тонкой неоднородной нелинейной по толщине вязкоупругой цилиндрической оболочки, заполненной средой и находящейся под действием внешнего давления q . Рассматривается случай линейной вязкоупругости. Построены характерные краевые зависимости. Дано сравнение моделей Винклера и Пастернака.

Рассмотрим цилиндрическую оболочку кругового сечения радиуса R , толщиной $2h$, длиной l , заполненной упругой средой. Действие сре-

ды на оболочку заменим силой $q_z = \tilde{q} \left(1 + \frac{\tilde{q}_0}{\tilde{q}} \nabla^2 \right) w$, распределенной по боковой поверхности оболочки и действующей против движения точек поверхности оболочки.

Предполагается, что торцы оболочки шарнирно закреплены:

$$N_{xx} = 0; M_{xx} = 0; w = 0; v = 0, \text{ при } x = 0, l,$$

где N_{xx} - осевое усилие, M_{xx} - изгибающий момент, v, w - компоненты вектора перемещений точек оболочки.

Для исследования параметрических колебаний тонких цилиндрических вязкоупругих оболочек, заполненных упругой средой применим вариационный принцип, соответствующий функционал которого в физических проекциях имеет вид:

$$\begin{aligned} J = & \int_0^{\pi/\omega} \int_0^l \int_0^{2\pi/k} \left\{ \dot{N}_{xx} \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right) + \dot{N}_{xp} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \varphi} \frac{\partial w}{\partial x} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right) + \dot{N}_{\varphi\varphi} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \dot{v}}{\partial \varphi} + \frac{\dot{w}}{R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \varphi} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \dot{M}_{xx} \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} - \frac{2}{R} \dot{M}_{xp} \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x \partial \varphi} - \right. \\ & - \dot{M}_{\varphi\varphi} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{8h^2} \dot{N}_{xx} \left[\frac{1}{E_0} (\dot{N}_{xx} - v \dot{N}_{\varphi\varphi}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{E_1} (\dot{M}_{xx} - v \dot{M}_{\varphi\varphi}) \frac{3}{h^2} \right] - \frac{3}{8h^4} \dot{M}_{xx} \left[\frac{1}{E_1} (\dot{N}_{xx} - v \dot{N}_{\varphi\varphi}) + \frac{3}{h^2} \frac{1}{E_2} (\dot{M}_{xx} - v \dot{M}_{\varphi\varphi}) \right] - \\ & - \frac{1}{8h^2} \dot{N}_{\varphi\varphi} \left[\frac{1}{E_0} (\dot{N}_{\varphi\varphi} - v \dot{N}_{xx}) + \frac{1}{E_1} \frac{3}{h^2} \frac{1}{E_1} (\dot{M}_{\varphi\varphi} - v \dot{M}_{xx}) \right] - \frac{3}{8h^4} \dot{M}_{\varphi\varphi} \left[\frac{1}{E_1} (\dot{N}_{\varphi\varphi} - v \dot{N}_{xx}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{E_2} \frac{3}{h^2} (\dot{M}_{\varphi\varphi} - v \dot{M}_{xx}) \right] - \frac{1+v}{4h^2} \dot{N}_{xp} \left[\frac{1}{E_0} \dot{N}_{xp} + \frac{3}{h^2} \frac{1}{E_1} \dot{M}_{xp} \right] - \\ & - \frac{3}{4h^4} \dot{M}_{xp} \left[\frac{1}{E_1} \dot{N}_{xp} + \frac{3}{h^2} \frac{1}{E_2} \dot{M}_{xp} \right] (1+v) - \frac{1}{4h^2} \dot{N}_{xx} \times \\ & \times \left[\int_{-\infty}^t \mathbf{K}_0(t, \tau) (2N_{xx} - N_{\varphi\varphi}) \frac{1}{3} d\tau + \int_{-\infty}^t \mathbf{K}_1(t, \tau) (2M_{xx} - M_{\varphi\varphi}) \frac{1}{h^2} d\tau \right] - \\ & - \frac{3}{4h^4} \dot{M}_{xx} \left[\int_{-\infty}^t \mathbf{K}_1(t, \tau) (2N_{xx} - N_{\varphi\varphi}) \frac{1}{3} d\tau + \int_{-\infty}^t \mathbf{K}_2(t, \tau) (2M_{xx} - M_{\varphi\varphi}) \frac{1}{h^2} d\tau \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4h^2} \dot{N}_{\varphi\varphi} \left[\int_{-\infty}^t K_0(t, \tau) (2N_{\varphi\varphi} - N_{xx}) \frac{1}{3} d\tau + \int_{-\infty}^t K_1(t, \tau) (2M_{\varphi\varphi} - M_{xx}) \frac{1}{h^2} d\tau \right] - \\
& -\frac{3}{4h^4} \dot{M}_{\varphi\varphi} \left[\int_{-\infty}^t K_1(t, \tau) (2N_{\varphi\varphi} - N_{xx}) \frac{1}{3} d\tau + \int_{-\infty}^t K_2(t, \tau) (2M_{\varphi\varphi} - M_{xx}) \frac{1}{h^2} d\tau \right] - \\
& -\frac{1}{2h^2} \dot{N}_{x\varphi} \left[\int_{-\infty}^t K_0(t, \tau) N_{x\varphi} d\tau + \frac{3}{h^2} \int_{-\infty}^t K_1(t, \tau) M_{x\varphi} d\tau \right] - \\
& -\frac{3}{2h^4} \dot{M}_{x\varphi} \left[\int_{-\infty}^t K_1(t, \tau) N_{x\varphi} d\tau + \frac{3}{h^2} \int_{-\infty}^t K_2(t, \tau) M_{x\varphi} d\tau \right] \Big\} R dx d\varphi dt +
\end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi/\omega} \int_0^l \int_0^k R \dot{q} \dot{w} dx d\varphi dt - \int_0^{\pi/\omega} \int_0^l \int_0^k R (\tilde{q} + \tilde{q}_0 \nabla^2) \dot{w}^2 dx d\varphi dt + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/\omega} \int_0^l \int_0^k \rho_0 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 R d\varphi dx dt$$

В функционале (1) принято, что $\frac{1}{E_i} = \int_{-h}^h \frac{z^i}{E(z)} dz$, $K_i = \int_{-h}^h z^i K(z, t) dz$

$\rho_i = \int_{-h}^h \rho(z) z^i dz$ $i = 0, 1, 2$. Кроме того принято, что:

$$K(z, t) = \frac{a}{E(z)} e^{-\beta t}, \quad (2)$$

где a – механический параметр, β – показатель экспоненты. Такая зависимость от z продиктована тем, что для однородного случая коэффициент при экспоненте пропорционален модулю Юнга. В этом случае образы Фурье имеют вид:

$$\begin{aligned}
\Phi_0 &= a \int_0^{\infty} e^{-\beta y} dy = \frac{a}{\beta}; \quad \Phi_s = a \int_0^{\infty} e^{-\beta y} \sin \omega y dy = a \frac{\omega}{\beta^2 + \omega^2}; \\
\Phi_c &= a \int_0^{\infty} e^{-\beta y} \cos \omega y dy = a \frac{\beta}{\beta^2 + \omega^2}. \quad (3)
\end{aligned}$$

Варьируемыми величинами в функционале являются \dot{u} , \dot{W} , \dot{v} , \dot{N}_{xx} , $\dot{N}_{x\varphi}$, \dot{M}_{xx} , $\dot{M}_{\varphi\varphi}$, $\dot{M}_{x\varphi}$. Определим стационарное значение функционала (1). Для этого применим метод Ритца. Исходя из ожидаемой физической картины, колебания цилиндрической оболочки, неизвестные величины будем ис-

каты в виде:

$$\begin{aligned}
u &= \cos \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi)(u_0 \cos \omega t + u_1 \sin \omega t), \\
v &= \sin \frac{\pi x}{l} \cos(k\varphi)(v_0 \cos \omega t + v_1 \sin \omega t), \\
w &= \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi)(w_0 \cos \omega t + w_1 \sin \omega t), \\
N_{xx} &= \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi)(N_{10} \cos \omega t + N_{11} \sin \omega t), \\
N_{x\varphi} &= \cos \frac{\pi x}{l} \cos(k\varphi)(N_{30} \cos \omega t + N_{31} \sin \omega t), \\
N_{\varphi\varphi} &= -qR + \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi)(N_{20} \cos \omega t + N_{21} \sin \omega t), \\
M_{xx} &= \cos \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi)(M_{10} \cos \omega t + M_{11} \sin \omega t), \\
M_{\varphi\varphi} &= \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi)(M_{20} \cos \omega t + M_{21} \sin \omega t), \\
M_{x\varphi} &= \cos \frac{\pi x}{l} \cos(k\varphi)(M_{30} \cos \omega t + M_{31} \sin \omega t),
\end{aligned} \tag{4}$$

где k - число волн в окружном направлении. Отметим, что это число должно быть четным, ввиду периодичности задачи. Представления (4) указывают на аналог данных аппроксимаций с аппроксимациями для случая статики. Подставим аппроксимации (3) в функционал (1) и проинтегрируем по x и t . Тогда получим некую функцию J от $\dot{u}_i, \dot{v}_i, \dot{w}_i, \dot{N}_{3i}, \dot{M}_{3i}, \dot{N}_{1i}, \dot{N}_{2i}, \dot{M}_{1i}, \dot{M}_{2i}$. Из-за громоздкости выражение этой функции здесь не приводится. Стационарное значение полученной функции определяется из следующей системы:

$$\begin{aligned}
1) \frac{\partial J}{\partial \dot{u}_0} = 0; \quad 2) \frac{\partial J}{\partial \dot{u}_1} = 0; \quad 3) \frac{\partial J}{\partial \dot{v}_0} = 0; \quad 4) \frac{\partial J}{\partial \dot{v}_1} = 0; \quad 5) \frac{\partial J}{\partial \dot{w}_0} = 0; \\
6) \frac{\partial J}{\partial \dot{w}_1} = 0; \quad 7) \frac{\partial J}{\partial \dot{N}_{10}} = 0; \quad 8) \frac{\partial J}{\partial \dot{N}_{11}} = 0; \quad 9) \frac{\partial J}{\partial \dot{N}_{30}} = 0; \quad 10) \frac{\partial J}{\partial \dot{N}_{31}} = 0; \\
11) \frac{\partial J}{\partial \dot{N}_{20}} = 0; \quad 12) \frac{\partial J}{\partial \dot{M}_{10}} = 0; \quad 13) \frac{\partial J}{\partial \dot{M}_{11}} = 0; \quad 14) \frac{\partial J}{\partial \dot{M}_{20}} = 0;
\end{aligned} \tag{5}$$

$$15) \frac{\partial J}{\partial \dot{M}_{21}} = 0; 16) \frac{\partial J}{\partial \dot{M}_{30}} = 0; 17) \frac{\partial J}{\partial \dot{M}_{31}} = 0.$$

Начальные значения для решения этой системы, на основе вариационного принципа, следующие: при отсутствии нагрузки, в оболочке имеет место естественное состояние, т.е. при $q_i = 0$ имеем:

$$u_j = v_j = W_j = 0; N_{ij} = M_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Итак, приведенная система (5) приближенно описывает параметрические колебания нелинейной вязкоупругой оболочки, неоднородной по толщине, с учетом нелинейности прогиба. Полученная система уравнений является системой квазилинейных дифференциальных уравнений. Для решения системы сначала разрешим ее относительно производных $\dot{u}_0, \dot{u}_1, \dot{v}_0, \dot{v}_1, \dot{W}_0, \dot{W}_1, \dot{N}_{10}, \dot{N}_{11}, \dot{N}_{30}, \dot{N}_{31}, \dot{N}_{20}, \dot{N}_{21}, \dot{M}_{10}, \dot{M}_{11}, \dot{M}_{20}, \dot{M}_{21}, \dot{M}_{30}, \dot{M}_{31}$, а потом, применяя метод Рунге-Кутты, решим систему задач Коши при вышеприведенных начальных условиях. Введем следующие безразмерные величины:

$$C_i = W_i/h; V_i = v_i/h; U_i = u_i/h; n_{1i} = N_{1i}/(E_x h);$$

$$m_{1i} = M_{1i}/(E_x h^2); n_{2i} = N_{2i}/(E_x h); n_{3i} = N_{3i}/(E_x h);$$

$$m_{2i} = M_{2i}/(E_x h^2); m_{3i} = M_{3i}/(E_x h^2) \quad (i = 0, 1).$$

Все параметры, входящие в систему, описывают конструкцию, кроме k , являющейся числом волн в окружном направлении. Задавая значение $k = 2$, находим для заданных значений параметров и Ω наименьшее τ_{ikp} , где $\tau_{inp} = q_1 R$. На рис.1 приведены зависимости зоны динамической устойчивости от параметров конструкции на плоскости нагрузка-частота.

Для удобства численного расчета были введены наряду с вышеприведенными безразмерными параметрами следующие величины:

$$W_0 = c_0 h; W_1 = c_1 h; \omega = \omega_0 \beta; \frac{1}{E_i} = h^{i+1} \frac{1}{E_x} \frac{1}{l_i}; \rho_0 = \frac{\rho E_x h^3}{\beta^2}; \rho_i = \tau_i E_x h^3.$$

Для значений параметров задачи приняты:

$$\tau_0 = 0,03; 0,09; \alpha = 0,5; 0,9; 0; \rho = 0,3; 1; \alpha_0 = 0,05; 0,1; 0; q = 24 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Функция упругой неоднородности по толщине взята в следующем виде:

$$\text{Линейное изменение} - E(z) = E_x \left[1 + \alpha \left(\frac{z}{h} \right) \right]; \text{ параболическое}$$

$$\text{изменение} - E(z) = E_x \left[1 + \alpha \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right],$$

где E_x – характерный модуль Юнга, α - параметр неоднородности. От-

метим, что в случае линейной функции $|\alpha| < 1$, в случае параболической функции α может быть любым, но в случае, когда оно отрицательно, оно по модулю должно быть меньше единицы.

На рис.1 штриховым линиям соответствуют колебания цилиндрической оболочки с заполнителем, когда влияние заполнителя описывается моделью Винклера. Сплошным линиям соответствуют колебания цилиндрической оболочки с заполнителем, когда влияние заполнителя описывается моделью Пастернака. Численный расчет показал, что учет влияния заполнителя приводит к увеличению критической силы потери устойчивости оболочки.

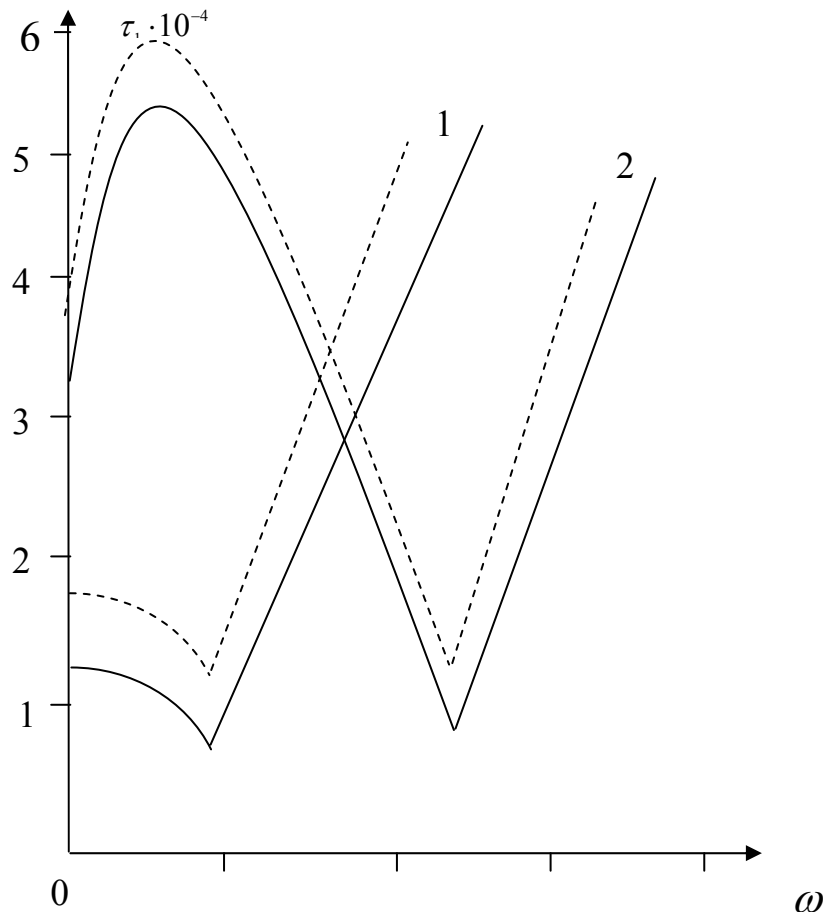


Рис.1. Зависимость τ_1 от ω для линейного закона изменения модуля упругости по толщине оболочки при следующих значениях параметров:
 $h_0 = 0,04; \alpha = 0,5; \tau_0 = 2 \cdot 10^{-6}; \rho = 4 \cdot 10^{-5}; \beta_0 = 1$
 1 - $q_0 / q = 0,05$; 2 - $q_0 / q = 0,2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пастернак П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. Москва, Стройиздат, 1954, 56 с.
2. Ализаде А.Н., Амензаде Р.Ю. Вариационный принцип нелинейно-вязкоупругости с учетом геометрической нелинейности. ДАН СССР, т.230, №6, 1976, с.1303-1305.
3. Юсифов М.О. Параметрические колебания трубопроводов с учетом покрытия. Деп.в ВИНИТИ 20.06.87, №796-Аз., 7с.

PASTERNAK MODELİNİN TƏTBİQİ İLƏ MÜHİTLƏ DOLU OLAN, QALINLIĞI BOYU QEYRİ -BİRCİNS, QEYRİ- XƏTTİ ÖZLÜ-ELASTİKİ SİLİNDRİK ÖRTÜYÜN PARAMETRİK RƏQSLƏRİNİN TƏDQIQI

İ.T.PİRMƏMMƏDOV

ANNOTASIYA

Təqdim olunan məqalədə mühitin rəqs prosesinə təsiri Pasternak modeli əsasında qəbul edilərək, qalınlığı boyu qeyri-bircins, qeyri-xətti özlü-elastiki silindrik örtüyün parametrik rəqsləri tədqiq olunmuşdur. Alınan nəticələr Vinkler modelinə uyğun nəticələr ilə müqayisə olunmuşdur. Xarakterik əyrilər qurulmuşdur.

INVESTIGATION OF PARAMETRIC OSCILLATIONS OF VISCO-ELASTIC CYLINDRIC ENVELOPMENT FILLED WITH A MEDIUM, NON-LINEAR AND NON-HOMOGENOUS ACROSS ITS THICKNESS, BASED ON PASTERNAK MODEL

I.T.PIRMAMEDOV

ABSTRACT

Parametric oscillations of visco-elastic cylindrical envelopment, non-linear and non-homogenous across its thickness, are studied in this paper where the medium is assumed to influence the oscillations on Pasternak model. Results are compared to those obtained earlier for Winkler model. Characteristic curves are constructed.